Je-li $f(x)$ na $\langle a,b\rangle$ nezáporná, tj. *f(x)* ≥ *0*, vyjadřuje určitý integrál $\int_a^b f(x)dx$ obsah plochy omezené křivkou $y = f(x)$, osou *x* a přímkami *x* = *a, x* = *b*.

Vlastnosti určitého integrálu

Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou na intervalu $\langle a,b\rangle$ integrovatelné, *k* a *c* jsou reálná čísla, kde $c \in (a,b)$. Pak platí :

a) $\int_a^b k.f(x)\,dx = k.\int_a^b f(x)\,dx,$

b) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx,$

c) $\int_a^a f(x)\,dx = 0,$

d) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,$

e) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$

Výpočet určitého integrálu

Věta : (Leibniz-Newtonova**)** Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná na intervalu $\langle a,b\rangle$, funkce $F(x)$ je spojitá funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$ a na intervalu (a,b) je primitivní funkcí k funkci $f(x)$. Pak platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Uvedená věta dává návod, jak počítat určitý integrál. Postupujeme tak, že k funkci $f(x)$ určíme primitivní funkci $F(x)$. Do primitivní funkce dosadíme nejprve horní mez *b* a od této funkční hodnoty odečteme hodnotu primitivní funkce v dolní mezi *a*.

Příklad : Pomocí Leibniz-Newtonovy věty vypočítejte určitý integrál $\int_0^3 \frac{1}{x+1}dx$.

Řešení : Integrovaná funkce $f(x) = \frac{1}{x+1}$ je na intervalu $\langle 0,3\rangle$ spojitá a tedy integrovatelná. Funkce $F(x) = \ln|x+1|$ je na intervalu $\langle 0,3\rangle$ spojitá a na intervalu $(0,3)$ je primitivní k funkci

$f(x) = \dfrac{1}{x+1}$. Jsou tedy splněny předpoklady Leibniz-Newtonovy věty a platí :

$$\int_0^3 \frac{1}{x+1}\,dx = \left[\ln|x+1|\right]_0^3 = \ln|3+1| - \ln|0+1| = \ln|4| - \ln|1| = \ln 4 - 0 = \ln 4 .$$

Metody pro výpočet určitého integrálu

Při výpočtu určitých integrálů je možné používat všechny metody a postupy, které jsme používali při počítání neurčitých integrálů. Tedy i substituční metodu a metodu per partes.

Substituční metoda pro výpočet určitého integrálu

Věta : Nechť funkce $\varphi(x)$ má na intervalu $\langle a,b\rangle$ spojitou derivaci $\varphi'(x)$. Nechť $\varphi(a)=\alpha$, $\varphi(b)=\beta$ a nechť funkce $t=\varphi(x)$ zobrazuje interval $\langle a,b\rangle$ na interval $\langle A,B\rangle$, obsahující body α,β. Nechť funkce $\varphi(x)$ je spojitá na intervalu $\langle A,B\rangle$. Pak platí

$$\int_a^b f(\varphi(x)).\varphi'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt = \left[F(t)\right]_\alpha^\beta = F(\alpha) - F(\beta).$$

Jak je zřejmé z uvedené věty, použití substituční metody je obdobné jako u neurčitého integrálu. Navíc však musíme provést transformaci (přepočítání) mezí určitého integrálu. To provádíme pomocí substituční rovnice $t=\varphi(x)$, kdy za x dosadíme původní meze a, b a vypočítáme nové meze α,β.

Příklad : Vypočítejte substituční metodou $\int_0^1 4\cdot \mathrm{e}^{-2x}dx$.

Řešení :
$$\int_0^1 4\cdot \mathrm{e}^{-2x}dx = \left|\begin{array}{c} \text{subst}: -2x = t \\ -2dx = dt \Rightarrow dx = -\frac{1}{2}dt \\ x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=1 \Rightarrow t=-2 \end{array}\right| = \int_0^{-2} 4\cdot \mathrm{e}^t \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)dt = -2\int_0^{-2} \mathrm{e}^t dt = 2\int_{-2}^0 \mathrm{e}^t dt =$$

$$= 2\cdot\left[\mathrm{e}^t\right]_{-2}^0 = 2\cdot\left(\mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^{-2}\right) = 2 - \frac{2}{\mathrm{e}^2} \approx 1{,}729$$

Poznámka : Druhou možností výpočtu určitého integrálu substituční metodou (bez nutnosti transformace mezí) je samostatné vyřešení neurčitého integrálu a následné užití Leibniz-Newtonovy věty.

V případě substituce typu $x=\varphi(t)$ bude mít integrační schéma tvar :

$$\int_a^b f(x)dx = \left|\begin{array}{c} \text{subst}: x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \\ a=\varphi(\alpha), b=\varphi(\beta) \end{array}\right| = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)).\varphi'(t)dt = \left[F(t)\right]_\alpha^\beta = F(\beta) - F(\alpha)$$

Příklad : Vypočítejte substituční metodou $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx$.

Řešení :

$$\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx = \left| \begin{array}{c} \text{subst}: x = t^2 \\ dx = 2tdt \\ x = 4 \Rightarrow t = 2 \\ x = 9 \Rightarrow t = 3 \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{1}{t(t^2+1)} 2tdt = 2\int_2^3 \frac{1}{t^2+1}dt = 2[\operatorname{arctg} t]_2^3 = 2(\operatorname{arctg} 3 -$$

$$- \operatorname{arctg} 2) \approx 0{,}2838.$$

Metoda per partes pro výpočet určitého integrálu

Věta : Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají derivaci na intervalu $\langle a,b \rangle$ a jejich derivace $u'(x)$ a $v'(x)$ jsou na intervalu $\langle a,b \rangle$ spojité. Pak platí

$$\int_a^b u \cdot v' \, dx = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u' \cdot v \, dx \cdot$$

Při výpočtu určitého integrálu metodou per partes postupujeme stejně jako u integrálu neurčitého. Na každou část primitivní funkce však aplikujeme Leibniz-Newtonovu větu.

Příklad : Metodou per partes vypočítejte $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx$.

Řešení : Volíme $u = x$, $v' = \cos x$, tedy $u' = 1$, $v = \sin x$.

Platí tedy $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \cos x \\ u' = 1 & v = \sin x \end{array} \right| = [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \left(\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} - 0 \right) + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$$= \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} - 1.$$